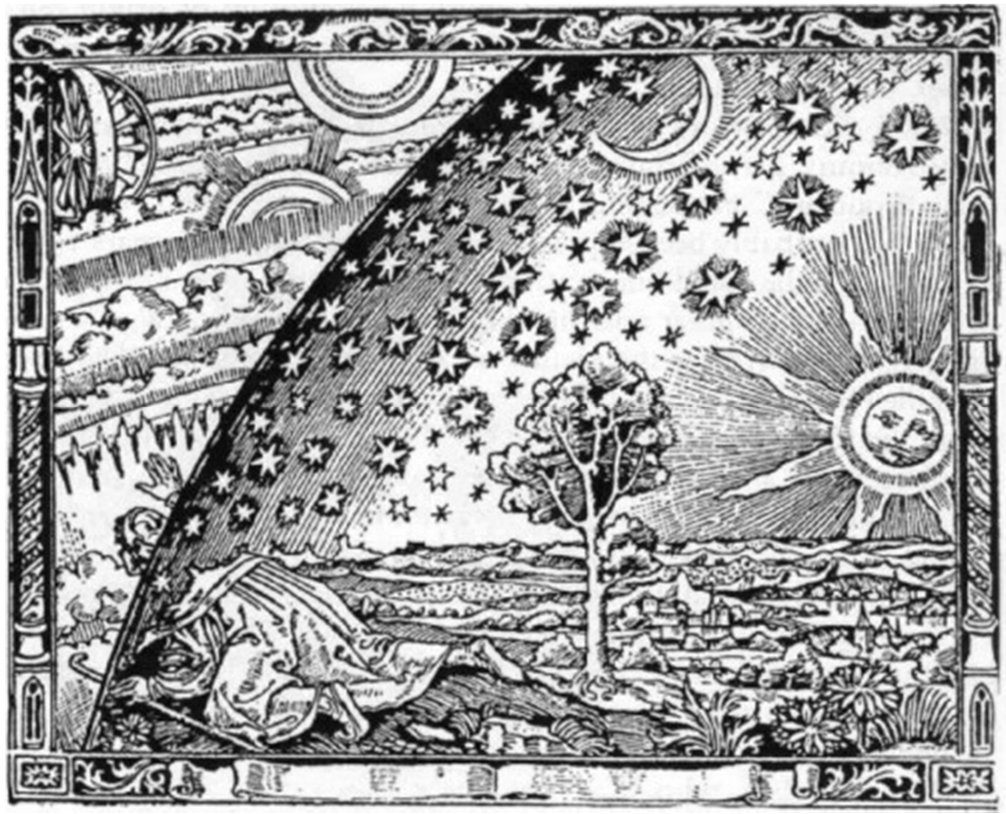
Mathematischer Beweis für die Plausibilität der Existenz Gottes

Prof. Dr. Andreas Solymosi

Was ist Wahrheit?

- Johannes 18,38

Camille Flammarion – L'Atmosphère



- Durchbruch des Menschen durch das Himmelsgewölbe und Erkenntnis neuer Sphären (Holzschnitt um 1520)

Philosophiegeschichte

- René Descartes, 1596-1650
  - cogito ergo sum
- David Hilbert, 1862-1943
  - 23 Probleme (1900)
  - Hilbertsches Programm
    - Cantors Mengenlehre
    - Tertium non datur
    - formales System

$$A \land \neg A$$

$$A \lor \neg A$$

Kurt Gödel

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica* und verwandter Systeme

Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), s. 173-189, Springer Verlag

* B. Russell und A. Whitehead:
Principia mathematica, Cambridge, 1925

Die Sätze von Gödel

1. Jedes formale System, das eine Formalisierung der Arithmetik enthält, ist unvollständig.

$$A \vee \neg A$$

2. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems kann nicht innerhalb des Systems erbracht werden.

$$A \wedge \neg A$$

Primzahlzerlegug

$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad \ldots$

51450

$5140 \;/\; 7 = 7350$

$7350 \;/\; 2 = 3675$

$3675 \;/\; 5 = 735$

$735 \;/\; 5 = 147$

$147 \;/\; 3 = 49$

$49 \;/\; 7 = 7$

$7 \;/\; 7 = 1$

$51450 \; = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

Kommutativität

→ Eindeutigkeit

Gödelisierung

$A \qquad\qquad A^* \Rightarrow \mathbb{N}$

$$A = \{\ a,\ b,\ c,\ \ldots\ z\ \}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_m \in A^* \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_m \end{array} \Rightarrow \quad 2^{k_1} 3^{k_2} 5^{k_3} \ldots p_m^{k_m}$$

Beispiel: Morse-Code

$A = \{–, \quad \cdot, \quad / \quad\} \qquad \Rightarrow \qquad \{\ 1 \quad 2 \quad 3\ \}$

$– \ – \ \cdot \ / \ – \ – \ – \ / \ – \ / \ – \in A^*$

$1\ 1\ 2\ \ 3\ 1\ \ 1\ \ 1\ 3\ 1\ \ 3\ 1$

$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^3 \cdot 23^1 \cdot 29^3 \cdot 31^1 =$

$14\,918\,139\,514\,169\,741\,850$

„$x \in A^*$ fängt mit 'G' an“

$\rightarrow$ „x ist durch 51450 teilbar“

(weil $51450 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \Leftarrow$ ' – – · / ' = 'G')

Diagonalverfahren von Cantor

- „Das Kontinuum ist unabzählbar.“

$[0, 1] = \{\ \mathrm{x}^{(1)}\ \ \mathrm{x}^{(2)}\ \ \mathrm{x}^{(3)}\ \ \dots\ \mathrm{x}^{(\mathrm{m})}\ \ \dots\ \}$

$0{,}a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$

$\mathrm{x}^{(1)} = 0{,}a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_n^1 \dots$

$\mathrm{x}^{(2)} = 0{,}a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots$

$\dots$

$\mathrm{x}^{(\mathrm{m})} = 0{,}a_1^m a_2^m a_3^m \dots a_n^m \dots$

$\dots$

$\mathrm{y} = 0{,}\bar{a}_1^1 \bar{a}_2^2 \bar{a}_3^3 \dots \bar{a}_n^n \dots$

$\bar{a}_i^i = \ (a_i^i + 1)\ mod\ 10$

Das Paradoxon von Richard

$A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} \quad \ldots \qquad A^{(m)} \quad \ldots$

$A^{(25)} =$ „__ ist eine ungerade Zahl“

$A^{(25)}{}_{33} =$ wahr $\quad A^{(25)}{}_{2500} =$ falsch

$A^{(330)} =$ __ ist durch 11 teilbar

$$
\begin{array}{lllllll}
A^{(1)} & A^{(1)}{}_1 & A^{(1)}{}_2 & A^{(1)}{}_3 & \ldots & A^{(1)}{}_n & \ldots \\
A^{(2)} & A^{(2)}{}_1 & A^{(2)}{}_2 & A^{(2)}{}_3 & \ldots & A^{(2)}{}_n & \ldots \\
 & & \ldots & & & & \\
A^{(m)} & A^{(m)}{}_1 & A^{(m)}{}_2 & A^{(m)}{}_3 & \ldots & A^{(m)}{}_n & \ldots \\
 & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Das Paradoxon von Richard (2)

$B = \neg\, A^{(n)}$

$B_n =$ „Die natürliche Zahl n erfüllt die n-te deutschsprachige Aussage $A^{(n)}$ nicht.“

$B_{25} = \neg\, A^{(25)}{}_{25} = \neg$wahr $=$ falsch

$\exists r : A^{(r)} = B$

$B \qquad A^{(r)}{}_1 \quad A^{(r)}{}_2 \quad A^{(r)}{}_3 \ldots \qquad A^{(r)}{}_n \ldots$

$B_r \quad = \quad A^{(r)}{}_r$ in der Tabelle

$B_r \quad = \quad \neg\, A^{(r)}{}_r$ per Definitionem

Gödel

$A = \{ \neg \ \vee \ \forall \ 0 \ f \ (\ ) \ \alpha \ \beta \}$

$P \subset A^*$ logisches System

$0 \qquad 1 = f0 \qquad 2 = f1 = ff0$ … Abkürzungen

$x_1 = \alpha\beta \qquad x_2 = \alpha\beta\beta \quad \ldots$

Peano: $\neg(fx_1 = 0)$

„_ hat keinen Vorgänger“ – Aussageform

$A^{(1)}{}_n \ A^{(2)}{}_n \ A^{(3)}{}_n \ \ldots \ A^{(m)}{}_n \ \ldots \ \text{Bew} \ \ldots$

B = „$A^{(n)}{}_n$ ist unableitbar“ $\qquad B \notin P$

Gödelisierung ⇒

$P \Rightarrow N$

B ⇒ $\neg \mathrm{Bew}\, A^{(n)}{}_n \in P$

$\exists q$: $A^{(q)}{}_n = \neg \mathrm{Bew}\, A^{(n)}{}_n$

1 $A^{(q)}{}_q$ ableitbar ⇒ $\neg \mathrm{Bew}\, A^{(q)}{}_q$ ableitbar ⇨
$A^{(q)}{}_q$ nicht ableitbar ⇨ Ø

2 $\neg\, A^{(q)}{}_q$ ableitbar ⇨ $A^{(q)}{}_q$ nicht ableitbar ⇒
$\neg\, \mathrm{Bew}\, A^{(q)}{}_q$ ableitbar ⇔ $A^{(q)}{}_q$ ableitbar ⇨ Ø

Epimenides

Titus 1,12

1. Satz von Gödel

Jedes formale System, das eine Formalisierung der Arithmetik enthält, ist unvollständig.

2. Satz von Gödel

„Der Beweis der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems kann nicht innerhalb des Systems erbracht werden.“

„Die Widerspruchsfreiheit von P ist in P nicht ableitbar.“

$$P \rightarrow B$$
$$P' = P \cup B \rightarrow B'$$
$$P'' = P' \cup B' \rightarrow B''$$
$$\ldots$$

Carnap

Bibel

- Johannes 1,1: „Am Anfang war der Logos“
- Hebräer 1,2: „ … durch ihn hat er auch die Welt gemacht …“
- Hebräer 1,3: „ … und er trägt alle Dinge durch die Macht seines Wortes … „
- Johannes 14,6: „ Ich bin … die Wahrheit …“

$$\neg\ \mathrm{Bew}\ \exists\Theta$$